数理解析研究所講究録 1204 巻 2001 年 107-113



# 江口タイプ方程式の解の存在について

福岡大学理学部　　黒木場　正城 (Masaki Kurokiba)

## §0. Introduction

本稿は慶応義塾大学の谷温之氏と福岡大学の田中尚人氏との共同研究に基づく.
2 種の金属原子から成るある合金は, 生成時には一様に混ざり合っているが, 原子の配列の規則化が要因となって時間の経過とともに徐々に組成の異なる 2 相に分離してゆく現象が知られている. 時刻 $t$ における場所 $x$ での 2 種の金属の局所的組成を $u(x,t)$ で表すと $u(x,t)$ の時間発展は Cahn-Hilliard 方程式で表現される. この方程式は数学的にも詳しく研究されている ([2], [4], [6], [7]). 2 種の金属が分離していく現象は $(x,t)$ における規則性を表すパラメータ $v(x,t)$ を導入する事で更に正確な記述ができる. 江口 ([3]) はこの $v(x,t)$ の効果を考慮して次の方程式系を提唱した:

$$
(\mathrm{P})\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t}=\Delta(-\Delta u+2u+uv^2), & (x,t)\in Q_T,\\
\dfrac{\partial v}{\partial t}=\beta\Delta v+\alpha v(a^2-u^2-b^2v^2), & (x,t)\in Q_T,\\
u(x,0)=u_0(x),\quad v(x,0)=v_0(x), & x\in\Omega,\\
\dfrac{\partial u}{\partial n}=0,\quad \dfrac{\partial\Delta u}{\partial n}=0,\quad \dfrac{\partial v}{\partial n}=0, & (x,t)\in\Gamma_T.
\end{cases}
$$

ここで $\alpha$, $\beta$, $a$, $b$ は正の定数である. $\Omega\subset R^n (n=1,2,3)$ は滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ有界領域とし, また $Q_T\equiv\Omega\times(0,T)$, $\Gamma_T\equiv\partial\Omega\times(0,T)$ である.

本論文では, この方程式系の解の存在と一意性についての結果を報告する. §1, §2 では時間局所解について議論する. Sobolev 空間を用いて解を定義し, 縮小写像の原理から時間局所解の存在を示す. §3 では時間大域解の存在を証明する. 方程式が 4 階の微分を含むので, その階数までアプリオリ評価が必要となる. こうして得られた解の漸近的挙動は興味深い問題であるが, 未解決である. 文献 [3] には数値計算の結果も述べられている. 更に詳しい数値計算も今後の課題であろう.

## §1. 時間局所解について

$\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\Omega u(x,t)dx=0$ 　なので $u$ は保存量である. $u$ の平均 $\overline{u}$ を

$$
\overline{u}\equiv\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(x,t)dx=\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_0(x,t)dx
$$

とする. 方程式系 (P) に変換 $u-\overline{u} \longrightarrow u$ をおこなうと

$$
(\mathrm{P}')\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta(-\Delta u + 2u + (u+\overline{u})v^2), & (x,t)\in Q_T,\\
\dfrac{\partial v}{\partial t} = \beta\Delta v + \alpha v(a^2 - (u+\overline{u})^2 - b^2v^2), & (x,t)\in Q_T,\\
u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x), & x\in\Omega,\\
\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad \dfrac{\partial \Delta u}{\partial n} = 0, \quad \dfrac{\partial v}{\partial n} = 0, & (x,t)\in\Gamma_T
\end{cases}
$$

となる. 但しここで $u_0-\overline{u}$ を改めて $u_0(x)$ とおいた. 問題 (P$'$) を, 次の関数空間 $X_T$ で考える:

$$
X_T \equiv \left\{ (u,v) \;\middle|\; \begin{array}{l}
u\in H^{4,1}(Q_T)\cap C(0,T;H^2(\Omega))\\
v\in L^2(0,T;H^3(\Omega))\cap H^1(0,T;L^2(\Omega))\cap C(0,T;H^2(\Omega))\\
u(x,0)=u_0, \quad v(x,0)=v_0(x), \qquad \int_\Omega u\,dx = \int_\Omega u_0\,dx = 0\\
\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_T} = \left.\dfrac{\partial \Delta u}{\partial n}\right|_{\Gamma_T} = \left.\dfrac{\partial v}{\partial n}\right|_{\Gamma_T} = 0\\
\|(u,v)\|^2_{X_T} \le 2C_3(T)(\|u_0\|^2_{H^2(\Omega)} + \|v_0\|^2_{H^2(\Omega)})
\end{array} \right\}.
$$

ここで, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$, $H^{4,1}(Q_T)\equiv H^1(0,T;L^2(\Omega))\cap L^2(0,T;H^4(\Omega))$, であり

$$
\begin{aligned}
\|(u,v)\|^2_{X_T} \quad \equiv \quad & \sup_{0\le t\le T}\left(\|u(t)\|^2_{H^2(\Omega)} + \|v(t)\|^2_{H^2(\Omega)}\right)\\
& + \int_0^T (\|u_t(s)\|^2 + \|v_t(s)\|^2 + \|u(s)\|^2_{H^4(\Omega)} + \|v(s)\|^2_{H^3(\Omega)})ds
\end{aligned}
$$

である. また $C_3(T)$ は (5) 式に現れる正の定数である. このノルムで逐次近似をすることによって次の時間局所解を得る.

**Theorem 1** (時間局所解の存在)　$u_0\in H^2(\Omega)$, $v_0\in H^2(\Omega)$ が $\left.\dfrac{\partial u_0}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0$, $\left.\dfrac{\partial v_0}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0$ をみたすと仮定すると, ある正の数 $T_1$ があって, 区間 $[0,T_1]$ で (P$'$) の一意的な解 $(u,v)\in X_{T_1}$ が存在する.

さらに, Theorem 1 とアプリオリ評価により次の時間大域解が得られる.

**Theorem 2** (時間大域解の存在)　Theorem 1 の仮定の下で, 任意の正の数 $T$ に対して, 区間 $[0,T]$ で (P$'$) の一意な解 $(u,v)\in X_T$ が存在する.

## §2. Theorem 1 の証明

### 2.1 $u$ の線形化方程式

問題 (P′) の $u$ について次の線形化問題 (1) を考える:

$$
(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \Delta^2 u - 2\Delta u = \Delta f(x,t), & (x,t) \in Q_T, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad \dfrac{\partial \Delta u}{\partial n} = 0, & (x,t) \in \Gamma_T. \end{cases}
$$

(1) について次の補題が成り立つ.

**Lemma 1** ([2, Theorem 6.1.6]) $T > 0$, $u_0 \in H^2(\Omega)$, $\left.\dfrac{\partial u_0}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0$, $\Delta f \in L^2(Q_T)$ を仮定すると, (1) の一意解 $u \in H^{4,1}(Q_T) \cap C(0,T;H^2(\Omega))$ が存在して, $0 \leq t \leq T$ で

$$
\begin{aligned}
&\|u(t)\|^2_{H^2(\Omega)} + \int_0^t (\|u(s)\|^2_{H^4(\Omega)} + \|u_t(s)\|^2) ds \\
(2)\qquad &\leq C_1(T) \left( \|u_0\|^2_{H^2(\Omega)} + \int_0^T \|\Delta f(s)\|^2 ds \right)
\end{aligned}
$$

が成り立つ. ここで定数 $C_1(T)$ は $T$ に関する非減少関数である.

### 2.2 $v$ の線形化方程式

問題 (P′) の $v$ の線形化方程式は次の通りである:

$$
(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - \beta \Delta v = g(x,t), & (x,t) \in Q_T, \\ v(x,0) = v_0(x), & x \in \Omega, \\ \left.\dfrac{\partial v}{\partial n}\right|_{\Gamma_T} = 0. \end{cases}
$$

問題 (1) と同様に問題 (3) について次の補題が成り立つ.

**Lemma 2** ([2, Theorem 6.1.7]) $T > 0$ とする. $v_0 \in H^2(\Omega)$, $\left.\dfrac{\partial v_0}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0$, $g, \Delta g \in L^2(Q_T)$, $\left.\dfrac{\partial g_0}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0$ とすると (3) の一意解 $v \in L^2(0,T;H^3(\Omega)) \cap C(0,T;H^2(\Omega)), v_t \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ が存在し, $0 \leq t \leq T$ で

$$
\begin{aligned}
&\|v(t)\|^2_{H^2(\Omega)} + \int_0^t (\|v(s)\|^2_{H^3(\Omega)} + \|v_t(s)\|^2) ds \\
(4)\qquad &\leq C_2(T) \left( \|v_0\|^2_{H^2(\Omega)} + \int_0^T (\|g(s)\|^2 + \|\Delta g(s)\|^2) ds \right)
\end{aligned}
$$

を満たす. ここで $C_2(T)$ は $T$ の非減少関数である.

### 2.3 関数空間の設定と不動点定理

線形化問題 (1), (3) に対する評価 (2), (4) を加えると

$$\|(u,v)\|_{X_T}^2 \le C_3(T)\Big(\|u_0\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|v_0\|_{H^2(\Omega)}^2 + \int_0^T (\|\Delta f(s)\|^2 + \|g(s)\|^2 + \|\Delta g(s)\|^2)ds\Big) \tag{5}$$

となる．ここで $C_3(T) \equiv \max\{C_1(T), C_2(T)\}$ である．関数空間 $X_T$ 上で逐次近似を行なう．$(\varphi,\psi) \in X_T$ を与えたときに, 次の問題 (6) の解 $(u,v)$ を対応させる写像 $F$ を考える:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \Delta^2 u - 2\Delta u = \Delta((\varphi+\overline{u})\psi^2) \equiv \Delta f(\varphi(x,t),\psi(x,t)), \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - \beta\Delta v = \alpha\psi(a^2 - (\varphi+\overline{u})^2 - b^2\psi^2) \equiv g(\varphi(x,t),\psi(x,t)). \end{cases} \tag{6}$$

(5) の右辺を $n=3$ の場合について評価する．$n=3$ のとき Gagliardo-Nirenberg の不等式 ([7]) より

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \le C\|u\|_{H^2(\Omega)}, \qquad \|\nabla u\|_{L^4(\Omega)} \le C\|u\|_{H^2(\Omega)}$$

が成り立つ. これらを使うと (5) の右辺は, たとえば次のように評価される:

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\Delta f(s)\|^2 ds \;\le\; & C\int_0^T \big( \|\psi\|_{L^\infty(\Omega)}^4\|\Delta\varphi\|^2 + \|\psi\|_{L^\infty(\Omega)}^4\|\nabla\varphi\|_{L^4(\Omega)}^4 + \|\nabla\psi\|_{L^4(\Omega)}^4 \\ & \quad + \|\psi\|_{L^\infty(\Omega)}^2(\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}^2 + \overline{u}^2)\|\Delta\psi\|^2 + (\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}^2 + \overline{u}^2)\|\nabla\psi\|_{L^4(\Omega)}^4 \big) ds \\ \le\; & C\int_0^T \big( \|\psi\|_{H^2(\Omega)}^4\|\varphi\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|\psi\|_{H^2(\Omega)}^4\|\varphi\|_{H^2(\Omega)}^4 + \|\psi\|_{H^2(\Omega)}^4 \\ & \quad + \|\psi\|_{H^2(\Omega)}^2(\|\varphi\|_{H^2(\Omega)}^2 + \overline{u}^2)\|\psi\|_{H^2(\Omega)}^2 + (\|\varphi\|_{H^2(\Omega)}^2 + \overline{u}^2)\|\psi\|_{H^2(\Omega)}^4 \big) ds \\ \le\; & C\left(\|(\varphi,\psi)\|_{X_T}^2 + \|(\varphi,\psi)\|_{X_T}^4 + \|(\varphi,\psi)\|_{X_T}^6\right)\|(\varphi,\psi)\|_{X_T}^2 \cdot T \\ \le\; & C_4(T)\left(\|u_0\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|v_0\|_{H^2(\Omega)}^2\right)\cdot T \end{aligned} \tag{7}$$

となる．$C_4(T)$ は $T$ の非減少関数である．残りの項も同様に評価されるのでそれらを (5) に代入すると

$$\|(u,v)\|_{X_T}^2 \le C_3T(1+C_4T)\|(u_0,v_0)\|_{H^2(\Omega)}^2. \tag{8}$$

したがって $T$ を

$$C_3T(1+C_4T) \le 2 \tag{9}$$

を満たすようにとれば $F$ は自分自身への写像となる．また

$$(\varphi_i,\psi_i) \in X_T, \qquad f(\varphi_i,\psi_i) \equiv f_i, \qquad g(\varphi_i,\psi_i) \equiv g_i \quad (i=1,2)$$

とすると, 同様の計算により

$$\begin{aligned} & \int_0^T (\|\Delta(f_1-f_2)\|^2 + \|g_1-g_2\|^2 + \|\Delta(g_1-g_2)\|^2)ds \\ & \qquad \le C_5(T)\|(\varphi_1-\varphi_2,\psi_1-\psi_2)\|_{X_T}^2 \cdot T. \end{aligned} \tag{10}$$

$$C_3C_5T < 1 \tag{11}$$

を満たすような $T$ をとると, $F$ は縮小写像となる. (9), (11) を同時に満たす様に $T$ をとると写像 $F$ に一意な不動点が存在するので, Theorem 1 が証明される.

## §3. Theorem 2 の証明

以下では Theorem 2 の証明のために必要なアプリオリ評価について述べる.
まず $\int_\Omega u(x,t)dx = 0$ より $\|u\|_{H^4(\Omega)}$ と $\|\Delta^2 u\|$ は, 同値なノルムになる ([6, Lemma 4.2]).
この方程式系の Lyapunov 汎関数は

$$J(u,v) = \int_\Omega \left( \frac{1}{2} \mid \nabla u \mid^2 + \frac{\beta}{2\alpha} \mid \nabla v \mid^2 - \frac{a^2}{2} v^2 + \frac{b^2}{4} v^4 + u^2 + \frac{1}{2}(u+\bar{u})^2 v^2 \right) dx \tag{12}$$

である. $\frac{d}{dt}J(u,v) \leq 0$ を $t$ に関して積分して, $-\frac{a}{2}\int_\Omega v^2 dx$ の項を評価すると

$$\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 + \|u\|^2 + \frac{\beta}{2\alpha}\|\nabla v\|^2 + \frac{b^2}{8}\|v\|_{L^4(\Omega)} + \|(u+\bar{u})v\|^2$$

$$+ \int_0^t ds \int_\Omega (\mid \nabla K(u,v)(s) \mid^2 + \frac{1}{\alpha} \mid v_t(s) \mid^2) dx \leq J(u_0, v_0) + \frac{a^4}{2b^2} \mid \Omega \mid \equiv C_7^2$$

となる. 但し $K(u,v) \equiv -\Delta u + 2u + (u+\overline{u})v^2$ である. この事より次の補題が得られる.

**Lemma 3** $(u,v)$ を方程式系 (P′) の解とするとき,

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C_7, \quad \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C_7, \quad \|u\|_{L^4(\Omega)} \leq C_7, \quad \int_0^t \|v_t(s)\|^2 ds \leq C_7 \tag{13}$$

が成り立つ.

さらに Alikakos[1] の結果を使うと $v$ の $t$ に関する一様有界性が得られる.

**Lemma 4** 方程式系 (P′) の解 $v$ に対して

$$\sup_{t>0}\|v(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_8 \max\left\{\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}, \sup_{t>0}\int_\Omega v^2 dx\right\} \tag{14}$$

が成り立つ.

証明の概略について述べる. 方程式 (P′) の第 2 式に $v^{2^k-1}$ をかけ, $\Omega$ 上で積分すると

$$\int_\Omega v^{2^k} dx \leq \mid \Omega \mid \|v(t)\|_{L^\infty(\Omega)}^{2^k} + C' 2^{(\lambda+1)k} \left( \sup_{t>0} \int_\Omega v^{2^k-1} dx \right)^2$$

が得られる. ここで $\lambda > 1$ は $(2^k + 2^{-k}) \leq 2^{\lambda k}$ をみたす様な定数である. さらに

$$B_k \equiv \max\left\{\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}, \sup_{t>0}\|v(t)\|_{L^{2^k}(\Omega)}\right\} \tag{15}$$

と定義すると, 漸化式 $B_k \le (C'')^{2^{-k}} \cdot 2^{(\lambda+1)k\cdot 2^{-k}} B_{k-1}$ が得られるので $k \longrightarrow \infty$ とすればよい.

さらに Lemma 3 と Lemma 4 を使って, 残りの必要な評価をエネルギー法により求める. (P′) の第 2 式に $\Delta v$ をかけて, 積分すると

$$\frac{1}{2}\|\nabla v\|^2 + \beta\int_0^t \|\Delta v(s)\|^2 ds + \frac{\alpha}{2}\int_0^t ds \int_\Omega \left((u+\bar{u})^2 \ + \ 3b^2v^2\right) | \nabla v |^2 \, dx \le \ C_8(T), \quad 0 \le t \le T \tag{16}$$

が得られる. 同様に (P′) の第 1 式に $\Delta u$ をかけて積分すると

$$\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 + 2\int_0^t \|\Delta v(s)\|^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^t \|\nabla\Delta v(s)\|^2 ds \le C_9(T), \ 0 \le t \le T \tag{17}$$

が得られる. 次に (P′) の第 2 式に $\nabla$ を作用させると, 境界上で $\left.\dfrac{\partial \Delta v}{\partial n}\right|_{\Gamma_T} = 0$ が得られるので, これを用いて $v$ の方程式に $\Delta$ を作用させた式と $\Delta v$ の積を積分する. 埋め込み

$$\|u+\overline{u}\|_{L^\infty(\Omega)} \le C\|\nabla\Delta u\|^{\frac{1}{2}}\|u\|^{\frac{1}{2}} + C'\|u\|$$

を使って評価すると

$$\frac{1}{2}\|\Delta v\|^2 + \frac{\beta}{2}\int_0^t \|\nabla\Delta v(s)\|^2 ds \le C_{10}(T), \qquad 0 \le t \le T \tag{18}$$

が得られる. さらに $u$ の方程式に $\Delta^2 u$ をかけて積分を行ない, 埋め込み

$$\|u+\overline{u}\|_{L^\infty(\Omega)} \le C\|\Delta u\|^{\frac{3}{4}}\|u+\overline{u}\|^{\frac{1}{4}} + C'\|u+\overline{u}\|$$

$$\|\nabla v\|_{L^\infty(\Omega)} \le C\|\Delta v\|^{\frac{5}{6}}\|v\|^{\frac{1}{6}} + C'\|u\|$$

を用いて評価すると

$$\frac{1}{2}\|\Delta u\|^2 + 2\int_0^t \|\nabla\Delta u(s)\|^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^t \|\Delta^2 u(s)\|^2 ds \le C_{11}(T), \ 0 \le t \le T \tag{19}$$

となる. 以上の事より次の結果が得られた.

**Lemma 5** 方程式 (P′) の解 $(u, v)$ に関して

$$\|\nabla v\|^2 \ + \ \int_0^t \|\Delta v(s)\|^2 ds \le C(T), \qquad 0 \le t \le T \tag{20}$$

$$\|\nabla u\|^2 \ + \ \int_0^t (\|\Delta^2 u(s)\|^2 + \|\nabla\Delta u(s)\|^2) ds \le C(T), \qquad 0 \le t \le T \tag{21}$$

$$\|\Delta v\|^2 \ + \ \int_0^t \|\nabla\Delta v(s)\|^2 ds \le C(T), \qquad 0 \le t \le T \tag{22}$$

$$\|\Delta u\|^2 \ + \ \int_0^t \|\Delta^2 u(s)\|^2 ds \le C(T), \qquad 0 \le t \le T \tag{23}$$

が得られる. 以上で必要なアプリオリ評価が得られたので, この事と Theorem 1 により Theorem 2 が得られる.

## 参考文献

[1] N. D. Alikakos, $L^P$ bounds of solutions of reaction-difusion equations, Comm. PDE, **4** (1979), 827-868.

[2] M. Brokate and J. Sprekels, *Hysteresis and Phase Transitions*, Applied Mathematical Sciences **121**, Springer-Verlag, New York, 1995.

[3] T. Eguchi, K. Shiiyama and H. Ninomiya, Evolution of Antiphase Ordered Domain Structure and Phase Separation Activated by Ordering, R. Takaki ed., *Research of Pattern Formation*, KTK Scientific Publishers, 1994, 411-430.

[4] C. M. Elliot and S. Zheng, On the Cahn-Hilliard equation, Arch.Rat.Mech.Anl., **96** (1986), 339-357.

[5] J. L. Lions and E. Magenes, *Nonhomogeneous Boundary Value Problem and Applications*, Springer-Verlag, New York, 1972.

[6] R. Temam, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, 2nd ed., Applied Mathematical Sciences **68**, Springer-Verlag, New York, 1997.

[7] S. Zheng, *Nonlinear Parabolic Equations and Hyperbolic-Parabolic Coupled Systems*, Pitmann Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics **76**, Longmann, 1995.